Ответы и решения задач «зелёного» уровня сложности MathCat.ONLINE

1. (4 балла) Ряд из цифр и дефисов выглядит так: 1-2-3-2-1-2-3-2-1-…-3-2-1. В нём 56 единиц. Сколько в нём дефисов?

Ответ: 220.

Решение: количество цифр $4 \times 55 + 1 = 221$.

2. (7 баллов) В круг встали *N* человек: 17 рыцарей и несколько лжецов. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый из них мог произнести фразу «Оба моих соседа — лжецы». Сколько значений *N*, при которых такое возможно?

Ответ: 18.

Решение: Около рыцаря могут стоять только лжецы, причём три лжеца не могут стоять подряд. Значит, в кругу 17 рыцарей, а в промежутках между ними по 1 или 2 лжеца. Всего лжецов от 17 до $17 \times 2 = 34$, в круге от 34 до 51 человека, всего 18 значений.

3. (7 баллов) Василий сложил 11 последовательных чисел и нашёл их сумму. Он запомнил, что в этой сумме четыре цифры, первые три — 100. Какая цифра четвёртая?

Ответ: 1.

Решение: Среднее число в 11 раз меньше общей суммы последовательных чисел, а из чисел от 1000 до 1009 только одно делится на 11 - число 1001.

4. (8 баллов) В летнем лагере дети играли в настольные игры. В первый день они сыграли 8 раз, и в каждой игре участвовало 3 человека. Во второй день было проведено 9 игр, в каждой из которых приняло участие 4 человека. Оказалось, что каждый ребёнок сыграл в итоге 5 раз. Сколько всего детей было в лагере?

Ответ: 12.

Решение: Общее число игр было $3*8+4*9=60$; поэтому детей было $60:5=12$.

5. (10 баллов) Петя из клетчатой бумаги по сторонам клеток вырезал всевозможные прямоугольники, периметр которых составляет *P* сторон клеток. Их оказалось 75 штук и среди них нет равных. Найдите все возможные значения *P*.

Ответ: 300 или 302.

Решение: Это прямоугольники, у которых меньшая сторона 1, 2, 3, …, 75. Если последний 75×75, то $P = 300$. Если последний 75×76, то $P = 302$.

6. (10 баллов) Длины всех сторон двух подобных, но не равных друг другу треугольников — целые числа. Чему может быть равен периметр большего, если в одном треугольнике есть стороны длины 2 и 6, а в другом треугольнике есть сторона длины 3? Найдите все варианты.

Ответ: 14 или 21.

Решение: Первый треугольник имеет стороны (2,5,6), (2,6,6) или (2,6,7). Возможно только подобие (2,6,6)-(3,9,9) или (2,6,6)-(1,3,3). Периметр большего - 21 или 14.

7. (11 баллов) На конкурсе *N* школьникам предложили три задачи. За решённую задачу каждый школьник получал столько баллов, сколько участников конкурса эту задачу не решили. В итоге одну задачу решило трое, вторую — четверо, третью — пятеро. Чему равно N, если суммарно школьники получили 130 баллов?

Ответ: 15.

Решение: Составляем уравнение по условию задачи. 3*(N-3)+4*(N-4)+5*(N-5)=130, то есть 12N-50=130, откуда находим N=15.

8. (13 баллов) На стороне *BC* треугольнике *ABC* отметили точку *M*, *MC* : *BC* = 1 : 3. На прямой, проходящей через точку *B* параллельно *AC*, отметили точку *K* так, что точки *A*, *M* и *K* лежат на одной прямой. Найдите площадь треугольника *MKC*, если площадь треугольника *ABC* равна 12.

Ответ: 8.

Решение: Площадь треугольника AMC равна 4, так как его основание MC втрое меньше BC. Треугольник BMK подобен треугольнику AMC с коэффициентом подобия BM:MC=2:1, поэтому его площадь равна 16. И, наконец, площадь треугольника MKC вдвое меньше площади треугольника BKC, то есть равна 8.

9. (15 баллов) Сколько чётных натуральных чисел, в записи каждого из которых более одной цифры, а цифры идут в порядке возрастания?

Ответ: 166.

Решение: Последней цифрой может быть 2, 4, 6 или 8. Для чисел с последней цифрой 2 первая цифра должна быть 1. Для чисел с последней цифрой 4 каждую предыдущую цифру нужно выбрать из списка (1,2,3), годится любое подмножество кроме пустого - всего 2^3-1=7 вариантов. Аналогично, для чисел с последней цифрой 6 будет всего 2^5-1=31 вариант, а для чисел с последней цифрой 8 – 2^7-1=127 вариантов. Итого 127+31+7+1 = 166 чисел.

10. (15 баллов) Пара действительных чисел $(x; y)$ такова,

что $(x^2+9)(y^2+1) = (x+3y)^2$. Найдите наименьшее возможное значение x^2+y^2.

Ответ: 6.

Решение: $(x^2+9)(y^2+1)=(x+3y)^2 \Leftrightarrow x^2y^2+9-6xy=0 \Leftrightarrow (xy-3)^2=0$, откуда xy=3. Так как $x^2+y^2 \geq 2xy$ (и равенство достижимо), то наименьшим возможным значением x^2+y^2 будет 6.